ORALE CALCOLO DIFFERENZIALE

Massimo e minimo di un insieme

Sia [a, b] un intervallo chiuso, è un punto di **massimo relativo** dell’intervallo [a, b] se esiste un intorno in cui .

Sia [a, b] un intervallo chiuso, è un punto di **minimo relativo** dell’intervallo [a, b] se esiste un intorno in cui .

Sia [a, b] un intervallo chiuso, è un punto di **massimo assoluto** dell’intervallo [a, b] per cui .

Sia [a, b] un intervallo chiuso, è un punto di **minimo assoluto** dell’intervallo [a, b] per cui .

Diversamente, un **estremo superiore o inferiore** si può dire esistente nella funzione per gli stessi principi dei massimi e minimi, solo che esso può anche non appartenere al codominio della funzione. L’estremo superiore è il minimo dei maggioranti, quello inferiore il massimo dei minoranti.

Successioni

Le **successioni** sono particolari funzioni definite in e che hanno valori in , è una sequenza ordinata di numeri reali con termini eventualmente ripetuti, una successione è **monotona crescente** se per ogni numero naturale si ha che . È **monotona decrescente** invece se per ogni numero naturale si ha che .

Invece una successione è **limitata superiormente** se e solo s esiste un numero reale M che *sovrasta tutti i termini*, cioè è posto superiormente a qualsiasi altro valore della successione, ciò si traduce in :

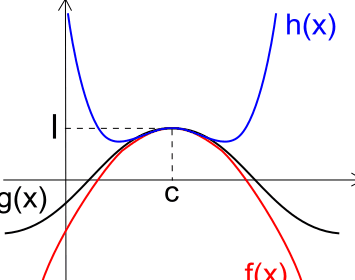
È invece **limitata inferiormente**, se esiste il numero reale m posto inferiormente a tutti gli altri valori della successione, cioè :

Se una successione è limitata sia superiormente che inferiormente, si dice **limitata**.

Teorema di Bolzano-Weierstrass

Sia una successione di numeri reali, se essa è limitata, allora esiste una sotto-successione convergente.

Teorema del confronto/dei due carabinieri

 Siano e due funzioni tali che e , ed esiste una funzione tale che , allora .

*Se due funzioni in un intorno di tendono ad uno stesso valore, una terza funzione contenuta fra esse, nell’intorno tenderà anch’essa a quel valore.*

Unicità del limite

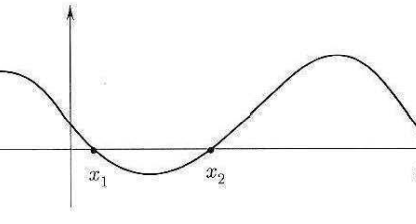
Se esiste tale limite è **unico**, infatti se esistessero due limiti diversi tra loro, presa una qualsiasi successione si avrebbe :  
La successione avrebbe due limiti e ciò è *assurdo*.

Limite finito in un punto di una funzione

Si dice che è il limite della funzione per che tende ad se per ogni esiste un numero 𝛿 tale che :   
   
Quindi, avvicinandosi arbitrariamente ad , la funzione tenderà al valore finito .

Permanenza del segno

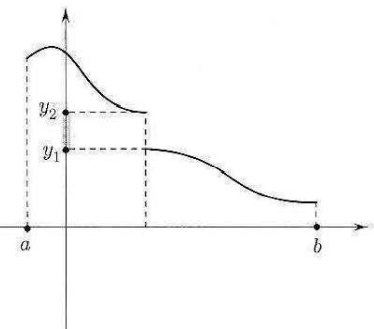
Se in un intorno , allora , quindi se una funzione è positiva in un intorno di C, e tende a C, il valore che assumerà il limite sarà positivo. Quindi nell’intorno di C, la funzione **assume lo stesso valore** del limite.

Continuità di una funzione

Una funzione è **continua** se può essere disegnata “senza staccare la penna dal foglio”, contrariamente, è **discontinua**. Per **teorema di esistenza degli zeri**, se è continua in e , allora esiste tale che se è strettamente monotona lo zero è uno.

Quindi possiamo concludere che se una funzione è continua, vale:

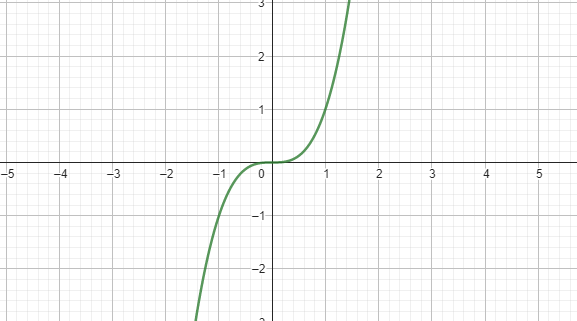
Un'altra importante proprietà delle funzioni continue è il **Teorema di Weierstrass** :  
Sia una funzione continua, allora assume massimo e minimo in .

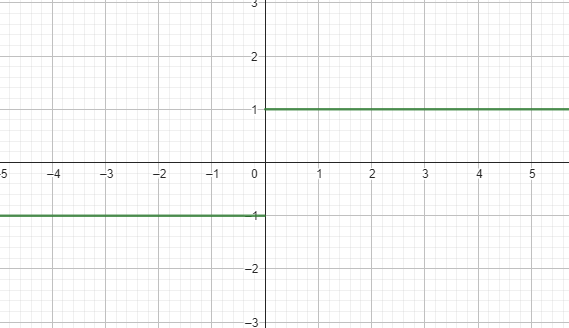
Una conseguenza dei due teoremi appena enunciati è **il teorema dei valori intermedi**, se è continua in , allora per ogni valore compreso tra il minimo ed il massimo, esiste un valore tale che .

Se la funzione invece *non è continua,* può esistere un valore tra minimo e massimo che però non è immagine di nessun elemento in ingresso della funzione. Esempio nell’immagine

Esempi :

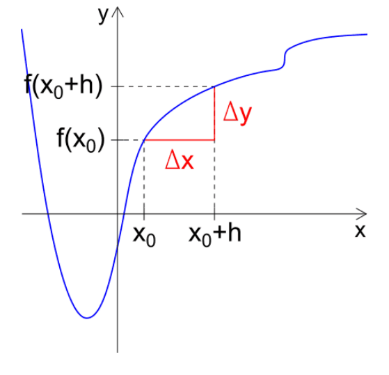
Una funzione continua :



Una funzione discontinua :

Definizione di derivata

Consideriamo una funzione di variabile reale a valori reali, definiamo **rapporto incrementale** di tale funzione nel punto :

È un rapporto di differenze calcolate a partire da un incremento, h.

Esso viene scritto come

La derivata di una funzione in un punto , non è altro che il limite del rapporto incrementale con il valore h che tende a 0, quindi al diminuire sempre della distanza. Quindi se esiste finito :

La derivata di si indica come **.**

Allora la funzione si dice derivabile nel punto . Inoltre, si dice *retta tangente* al grafico nel punto : . Possiamo considerare la derivata come il *tasso di variazione puntuale o istantaneo*.

È ovvio il seguente teorema : **Se è derivabile in un punto , allora è continua in** . Dimostriamo tale enunciato :

eguagliamo il rapporto incrementale e moltiplichiamo ad entrambe le parti, h.

Semplifichiamo h nel primo termine e portiamo a destra dell’uguale cambiando segno.

Vediamo i limiti per che tende a 0 :

Spezziamo i limiti come :

Il limite evidenziato è la derivata prima nel punto . Invece = 0.

L’ultimo = dato che non dipende da h.

Possiamo concludere che il valore a destra dell’uguale è uguale a .

Rimane quindi:

Quindi se allora . Questo diventa allora :

È quindi dimostrata la continuità.

Teorema di Fermat

Sia e sia un punto di massimo o di minimo relativo, se è derivabile in , allora   
Dimostrazione:  
se è derivabile, sappiamo che

Dato che è un massimo relativo, allora se > 0 e , vale che :

invece, se < 0 e , dato che è un massimo relativo, vale che :

intersecando i due casi otteniamo :

Quindi

Teorema di Lagrange

Sia una funzione **continua** in e **derivabile** in , esiste un punto tale che :

Questo graficamente, significa che esiste un punto in cui la retta tangente al grafico è **parallela** alla **retta secante**.

Dimostrazione:  
Consideriamo la funzione continua e derivabile :

Avremo dunque :

Sostituiamo quindi k a tale risultato : poiché soddisfa il teorema di Rolle esiste un punto . Calcoliamo la derivata di

Otteniamo quindi la tesi che :

Teorema del criterio differenziale di monotonia

Sia una funzione continua e derivabile nell’intervallo , in tal caso vale che :

1. * Se è crescente, allora , dunque abbiamo che e che , da ciò ne consegue che
   * Se è decrescente, allora , dunque abbiamo che e che , da ciò ne consegue che

In linguaggio naturale, tale teorema afferma che è crescente in un intervallo, se e solo se la derivata prima è maggiore o uguale a 0 per ogni x appartenente all’intervallo, oppure che è decrescente in un intervallo, se e solo se la derivata prima è minore o uguale a 0 per ogni x appartenente all’intervallo.

Dimostrazione:  
crescente :

Assumiamo che , per Teorema di Lagrange possiamo dire che :

Come ipotesi, , dunque :

Sappiamo che , e quindi ne consegue che :

decrescente :

Assumiamo che , per Teorema di Lagrange possiamo dire che :

Come ipotesi, , dunque :

Sappiamo che , e quindi ne consegue che :

Formula di Taylor con resto di Peano

La formula di Taylor permette di approssimare localmente tutte le funzioni sufficientemente regolari con polinomi.

Se una funzione è derivabile almeno volte in un certo intervallo ed esista la derivata  
 -essima almeno in 0, la funzione può essere scritta come :

è il polinomio di grado minore o uguale ad , ed esso vale :

L’ descrive **l’errore di approssimazione**, è una quantità che per che tende a 0, diventa sempre più piccola/trascurabile al crescere di .

resto di Lagrange

Se x tende invece ad un punto si può approssimare l’errore con il resto di Lagrange.

Il termine evidenziato è il cosiddetto resto di Lagrange.